

KAIST POW 2013-23

Hansol Jeon (Korea Univ.)

2013년 12월 7일

Step 1. $\forall i : a_i \geq 0$ 이기 때문에 $P(0) \geq 0, x \geq 0 \Rightarrow P'(x) \geq 0$ 이며, 고로 $P(x) = 0$ 은 양수근을 가지지 않는다. 따라서 정수열 $\{b_i\}_{b_i > 0}, \{c_i\}_{c_i \geq 0}$ 에 대해

$$P(x) = \prod_{i=1}^n (b_i x + c_i)$$

로 쓸 수 있다.

Step 2. 이제 $a_0 = 0$ 임을 보이자. 만약 $a_0 \neq 0$ 이라면 $\forall i : c_i > 0$ 이고, $\prod b_i (= a_n)$ 과 $\prod c_i (= a_0)$ 가 동시에 1은 아니기 때문에 1보다 큰 b_i 나 c_i 가 있다. 따라서 a_2 를 비교하여

$$a_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j \frac{c_1 c_2 \cdots c_n}{c_i c_j} > \sum_{1 \leq i < j \leq n} 1 = \binom{n}{2}$$

를 얻는다. 고로 $a_2 \leq n$ 이라면 $\frac{n(n-1)}{2} < n \Rightarrow n \leq 2$ 이어야 한다. 그런데 방정식 $2x^2 + 1 = 0, x^2 + 2 = 0$ 은 유리근을 가지지 않는다.

Step 3. 이제 문제의 조건을 만족하는 $P(x)$ 를 구하려 한다. **Step 2.**에 의해 일반성을 잃지 않고 $b_1 = 1, c_1 = 0$ 이라 둘 수 있다. 즉

$$P(x) = x \prod_{i=2}^n (b_i x + c_i) = x(a_n x^{n-1} + \cdots + a_3 x^2 + a_2 x + a_1)$$

여기서는 a_3 을 비교하여,

$$a_3 = \sum_{2 \leq i < j \leq n} b_i b_j \frac{c_2 c_3 \cdots c_n}{c_i c_j} > \sum_{2 \leq i < j \leq n} 1 = \binom{n-1}{2}$$

따라서 $a_3 \leq n$ 이라면 $\frac{(n-1)(n-2)}{2} < n \Rightarrow n^2 - 5n + 2 < 0 \Rightarrow n < 5$ 이어야 한다.

Step 4. 마지막으로 $n \leq 4$ 에 대해서 문제의 조건을 만족하는 다항식을 모두 찾자.

$$(1) \ n = 1 \text{ 일 때 } P(x) = x$$

$$(2) \ n = 2 \text{ 일 때 } P(x) = 2x^2 + x, \ x^2 + 2x$$

$$(3) \ n = 3 \text{ 일 때 } P(x) = x^3 + 3x^2 + 2x, \ 2x^3 + 3x^2 + x$$

$$(4) \ n = 4 \text{ 일 때 } P(x) = x(b_2x+c_2)(b_3x+c_3)(b_4x+c_4) = x(a_4x^3+\cdots+a_2x+a_1)$$

에서 a_2 를 비교하면

$$a_2 = \sum_{\substack{2 \leq i < j \leq 4 \\ k \neq i, j}} b_k c_i c_j > \sum_{\substack{2 \leq i < j \leq 4 \\ k \neq i, j}} 1 = \binom{3}{2}$$

므로 $a_2, a_3 > 3$ 이다. 즉 $a_2 = a_3 = 4$ 이 되는데, 이는 문제의 조건에 모순된다.